数理解析研究所講究録
第 877 巻 1994 年 46-49

$SL(2,2^n)$ の quiver と relation (標数 2 の代数的閉体上)

On quiver and relations for $SL(2,2^n)$ in characteristic 2

千葉大学自然科学研究科 3 年　越田　均　(Hitoshi Koshita)

Abstract

Let $G=SL(2,2^n)$ and FG be the group algebra of G over an algebraically closed field F of characteristic 2. Then FG is the algebra of wild representation type except for a few case $n=1,2$. In [4], the basic algebra of FG is described by a certain quiver with relations. Part of the fact in the case $n=3$ is introduced here.

体上有限次元の多元環には basic algebra があって, それらは Morita 同値になります. また, その basic algebra は quiver と relation で表されることが知られています. 一方, 体上有限次元の多元環は有限 type と無限 type に, 無限 type はさらに tame type と wild type に分かれます. 有限 type と tame type についての quiver と relation はよくわかっていますが [3], wild type についてはあまり知られていません. いま $G=SL(2,2^n)$, Fを標数 2 の代数的閉体とします. G の Sylow 2-部分群が位数 2^n の基本可換群であることから, 群環 FG は, n が 1 のときは有限 type, n が 2 のときは tame type, n が 3 以上のときは wild type になります [2, 4.4].

群環 FG は 2 つのブロックに分かれます. それを $FG=B_0\oplus B_1$, ただし B_0が主ブロックとします. B_1は Steinberg module という射影的な単純加群を含んでいます. したがって B_1は単純多元環ですから, その basic algebra は Fと同型です. その Fを quiver と relation で表すと, quiver は点が 1 つで矢はありません. よって relation もありません. これから主ブロック B_0についてその basic algebra の quiver と relation を考えようとおもいます.

Λ を B_0の basic algebra, また Q は FG の Ext-quiver ([2, Definition 4.1.6]) すなわち単純 FG-加群の同型類の個数だけの点をもち, 単純 FG-加群 S_1に対応する点から単純 FG-加群 S_2に対応する点への矢の本数が $\dim_F \mathrm{Ext}^1_{FG}(S_1,S_2)$ になっているような quiver とします. [1] により Q がわかります. Λ の Ext-quiver もおなじ Q になります. FQ を Q の F 上の path algebra (quiver algebra) とします. そのとき, $\Lambda\cong\dfrac{FQ}{X}$となります [2, 4.1]. ただし, X は FQ のイデアルです. $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $\cdots$, $x_\nu=y_\nu$がもとめようとしている relation であることは $\{x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \cdots,\ x_\nu-y_\nu\}$ がイデアル Xを生成することとおなじです. $n=2$ の場合は [3, p.295] によりわかります. n が一般の自然数の場合, 特に $n\geq 3$ のとき, ある relation が [4] によりわかります. ここでは $n=3$ として [4] の一部を紹介したいとおもいます.

まず, 文献 [1] から引用します. $N=\{1,2,3\}$ とします. 各 $i\in N$ について V_i を, $\{x_i,y_i\}$ を基とする 2 次元 F-空間とし, さらに G の元 $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ の右作用を

$$\begin{cases} x_i\cdot g=g_{11}^{2^{i-1}}x_i+g_{12}^{2^{i-1}}y_i,\\ y_i\cdot g=g_{21}^{2^{i-1}}x_i+g_{22}^{2^{i-1}}y_i\end{cases}$$

のように定義します．各 V_i はすべて self-dual な右 FG-加群になります．これらは単純 FG-加群ですが，さらにすべての単純 FG-加群（の同型類の代表系）は次のようにしてえられます．$\varnothing \neq I \subset N$ のとき $V_I = \bigotimes_{i\in I} V_i$ とします．また $V_\varnothing = F$（自明な FG-加群）とします．そうすると V_I $(I \subset N)$ が単純 FG-加群の完全代表系になります．特に V_N が Steinberg module になります．つぎに，各 $I \subset N$ に対し P_I を V_I の射影被覆とします．すると，$P_I \cong V_{N-I} \otimes V_N$ $(\varnothing \neq I \subset N)$，また $P_\varnothing \oplus P_N \cong V_N \otimes V_N$ となります．さらに，C_{HI} を P_I の組成剰余群列における V_H の重複度とします．[1, Theorem 2] より，C_{HI} は右の表のようになることがわかります．さて，N の元 i に対し，$i = 3$ のときは $i+1 = 1$ とします．また $I \subset N$ と $i \in N$ に対し，$i \notin I$ のとき $I + \{i\} = I \cup \{i\}$，一方，$i \in I$ のとき $I + \{i\} = I - \{i\} = \{j \in I; j \neq i\}$ と $I + \{i\}$ を定義します．そしてつぎのような quiver Q と relation を考えます．

$I \backslash H$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\varnothing$	8	4	4	4	2	2	2
$\{1\}$	4	4	2	2	2	0	1
$\{2\}$	4	2	4	2	1	2	0
$\{3\}$	4	2	2	4	0	1	2
$\{1,3\}$	2	2	1	0	2	0	0
$\{1,2\}$	2	0	2	1	0	2	0
$\{2,3\}$	2	1	0	2	0	0	2

quiver Q

$$\begin{tikzcd}
\{1,2\} \arrow[r, shift left, "\alpha_{1,\{2\}}"] & \{2\} \arrow[l, shift left, "\alpha_{1,\{1,2\}}"] \arrow[dr, shift left, "\alpha_{2,\varnothing}"] & \\
\{2,3\} \arrow[r, shift left, "\alpha_{2,\{3\}}"] & \{3\} \arrow[l, shift left, "\alpha_{2,\{2,3\}}"] \arrow[r, shift left, "\alpha_{3,\varnothing}"] & \varnothing \arrow[ul, shift left, "\alpha_{2,\{2\}}"] \arrow[l, shift left, "\alpha_{3,\{3\}}"] \arrow[dl, shift left, "\alpha_{1,\{1\}}"] \\
\{1,3\} \arrow[r, shift left, "\alpha_{3,\{1\}}"] & \{1\} \arrow[l, shift left, "\alpha_{3,\{1,3\}}"] \arrow[ur, shift left, "\alpha_{1,\varnothing}"] &
\end{tikzcd}$$

relations

$$\begin{aligned}
&\alpha_{i,\varnothing}\,\alpha_{i,\{i\}} = 0,\\
&\alpha_{i,\{i+1\}}\,\alpha_{i,\{i,i+1\}} = 0,\\
&\alpha_{i+1,\varnothing}\,\alpha_{i,\{i\}}\,\alpha_{i,\varnothing} = \alpha_{i,\{i,i+1\}}\,\alpha_{i,\{i+1\}}\,\alpha_{i+1,\varnothing},\\
&\alpha_{i+1,\{i+1\}}\,\alpha_{i,\{i,i+1\}}\,\alpha_{i,\{i+1\}} = \alpha_{i,\{i\}}\,\alpha_{i,\varnothing}\,\alpha_{i+1,\{i+1\}},\\
&\alpha_{i,\{i+1\}}\,\alpha_{i+1,\varnothing}\,\alpha_{i,\{i\}} = 0,\\
&\alpha_{i,\varnothing}\,\alpha_{i+1,\{i+1\}}\,\alpha_{i,\{i,i+1\}} = 0,\\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

この quiver Q は N の真部分集合をそのまま点とみなし，また $i-1 \notin I \subset N$ のときに始点が $I+\{i\}$ で終点が I の $\alpha_{i,I}$ と表される矢があるように定義されています．さて，$x = y$ という relation は FQ の元 $x - y$ と考えて，上の 18 個の relation で生成される FQ のイデアルを X とします．そのとき [4, Definition 5 と Proposition 2] より，ある F-多元環全準同型 $\Phi : FQ \twoheadrightarrow \Lambda$ を $X \subset \operatorname{Ker}\Phi$ すなわち上の 18 個の relation がすべて $\operatorname{Ker}\Phi$ に属するように定義することができます．

Q では始点が H で終点が I の path は一般に $(H|\alpha_{i_a,I_{a-1}}, \alpha_{i_{a-1},I_{a-2}}, \cdots, \alpha_{i_1,I_0}|I)$ のように表されますが，そのとき quiver Q の定義から $I_0 = I$, $H = I_{a-1} + \{i_a\}$，かつ，すべて

の $b=1,2,\cdots,a-1$ について $I_b=I_{b-1}+\{i_b\}$ でなければなりません. つまり, 上のように path を表すとき, それは H か I のいずれか一方と $i_a,i_{a-1},\cdots,i_1$ によってきまってしまいます. そこで上とおなじ path を $(H|i_a,i_{a-1},\cdots,i_1|I)$ のように表すことにします.

つぎに, Nの 2 つの真部分集合 H,I に対し, Q の path の集合 $\Omega(H,I)$ を以下のように定義します.

$$
\begin{aligned}
&\Omega(\{i,i+1\},\{i,i+1\})=\{(\{i,i+1\}||\{i,i+1\}),(\{i,i+1\}|i,i+1,i+2,i+2,i+1,i|\{i,i+1\})\},\\
&\Omega(\{i\},\{i\})=\{(\{i\}||\{i\}),(\{i\}|i,i+1,i+1,i|\{i\}),(\{i\}|i+2,i+2|\{i\}),\\
&\qquad\qquad(\{i\}|i,i+1,i+1,i,i+2,i+2|\{i\})\},\\
&\Omega(\varnothing,\varnothing)=\{(\varnothing||\varnothing),(\varnothing|1,1|\varnothing),(\varnothing|2,2|\varnothing),(\varnothing|3,3|\varnothing),(\varnothing|1,1,2,2|\varnothing),(\varnothing|1,1,3,3|\varnothing),(\varnothing|2,2,3,3|\varnothing),\\
&\qquad\qquad(\varnothing|1,1,2,2,3,3|\varnothing)\},\\
&\Omega(\{i,i+1\},\{i+2\})=\{(\{i,i+1\}|i,i+1,i+2|\{i+2\})\},\\
&\Omega(\{i+2\},\{i,i+1\})=\{(\{i+2\}|i+2,i+1,i|\{i,i+1\})\},\\
&\Omega(\{i,i+1\},\{i+1\})=\{(\{i,i+1\}|i|\{i+1\}),(\{i,i+1\}|i,i+1,i+2,i+2,i+1|\{i+1\})\},\\
&\Omega(\{i+1\},\{i,i+1\})=\{(\{i+1\}|i|\{i,i+1\}),(\{i+1\}|i+1,i+2,i+2,i+1,i|\{i,i+1\})\},\\
&\Omega(\{i\},\{i+1\})=\{(\{i\}|i,i+1|\{i+1\}),(\{i\}|i,i+2,i+2,i+1|\{i+1\})\},\\
&\Omega(\{i+1\},\{i\})=\{(\{i+1\}|i+1,i|\{i\}),(\{i+1\}|i+1,i+2,i+2,i|\{i\})\},\\
&\Omega(\{i,i+1\},\varnothing)=\{(\{i,i+1\}|i,i+1|\varnothing),(\{i,i+1\}|i,i+1,i+2,i+2|\varnothing)\},\\
&\Omega(\varnothing,\{i,i+1\})=\{(\varnothing|i+1,i|\{i,i+1\}),(\varnothing|i+2,i+2,i+1,i|\{i,i+1\})\},\\
&\Omega(\{i\},\varnothing)=\{(\{i\}|i|\varnothing),(\{i\}|i,i+1,i+1|\varnothing),(\{i\}|i,i+2,i+2|\varnothing),(\{i\}|i,i+1,i+1,i+2,i+2|\varnothing)\},\\
&\Omega(\varnothing,\{i\})=\{(\varnothing|i|\{i\}),(\varnothing|i+1,i+1,i|\{i\}),(\varnothing|i+2,i+2,i|\{i\}),(\varnothing|i+2,i+2,i+1,i+1,i|\{i\})\},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(i=1,2,3).
\end{aligned}
$$

このなかにないときは $\Omega(H,I)=\varnothing$ とします. $|\Omega(H,I)|=C_{HI}$ となっています.

さて, FQ の元 z_1,z_2 に対し, $z_1-z_2\in X$ のときに $z_1\equiv z_2$ とかいて, FQ の同値関係 $\equiv$ を定義します. path の省略した表し方にあわせて quiver も省略して表し, relation は同値関係 $\equiv$ を用いてかくと次のようになります.

quiver Q

$$
\begin{tikzcd}
\{1,2\} \arrow[r, shift left, "1"] & \{2\} \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[dr, shift left, "2"] & \\
\{2,3\} \arrow[r, shift left, "2"] & \{3\} \arrow[l, shift left, "2"] \arrow[r, shift left, "3"] & \varnothing \arrow[l, shift left, "3"] \arrow[ul, shift left, "2"] \arrow[dl, shift left, "1"] \\
\{1,3\} \arrow[r, shift left, "3"] & \{1\} \arrow[l, shift left, "3"] \arrow[ur, shift left, "1"] &
\end{tikzcd}
$$

relations

$$
\begin{aligned}
&(\{i\}|i,i|\{i\})\equiv 0,\\
&(\{i,i+1\}|i,i|\{i,i+1\})\equiv 0,\\
&(\{i+1\}|i+1,i,i|\varnothing)\equiv(\{i+1\}|i,i,i+1|\varnothing),\\
&(\varnothing|i+1,i,i|\{i+1\})\equiv(\varnothing|i,i,i+1|\{i+1\}),\\
&(\{i,i+1\}|i,i+1,i|\{i\})\equiv 0,\\
&(\{i\}|i,i+1,i|\{i,i+1\})\equiv 0,\\
&\qquad\qquad\qquad(i=1,2,3).
\end{aligned}
$$

そして, 始点が H で終点が I のどんな path も 0 と同値になるか, あるいは $\Omega(H,I)$ に属する path のどれかと同値になることを確かめることができます. (この事実は [4,

Proposition 3] に対応しています.) これによって,

$$\dim_F \frac{FQ}{X} \leq \sum_{H,I \subsetneqq N} C_{HI}$$

がわかります. 一方,

$$\sum_{H,I \subsetneqq N} C_{HI} = \dim_F \Lambda = \dim_F \frac{FQ}{\operatorname{Ker}\Phi} < \infty$$

ですから, $X \subset \operatorname{Ker}\Phi$ により, $X = \operatorname{Ker}\Phi$ であることがわかります.

参考文献

[1] J.L. Alperin, Projective modules for $SL(2, 2^n)$, J. Pure Appl. Algebra, 15 (1979), 219–234.

[2] D.J. Benson, Representations and cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30 (Cambridge University Press, 1991).

[3] K. Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Notes in Mathematics 1428 (Springer, Berlin, 1990).

[4] H. Koshita, Quiver and relations for $SL(2, 2^n)$ in characteristic 2, J. Pure Appl. Algebra (to appear).